

А. Г. ГОРБАШОВА, аспирант НТУУ «КПИ», Київ

О. Н. ПЕТРИЩЕВ, проф., д-р. техн. наук, НТУУ «КПИ», Київ

Г. М. СУЧКОВ, проф., д-р. техн. наук, НТУ «ХПИ», Харків

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ РАДИАЛЬНО РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЭЛЕЯ

Дана формулировка граничной задачи теории упругости, результаты решения которой моделируют электромагнитное возбуждение поверхностных волн Рэлея в металлическом полупространстве. Получены общие соотношения для расчета амплитудного множителя возбуждения волны Рэлея. На основе полученных решений развита методика математического моделирования преобразователя электромагнитного типа в режиме возбуждения радиально распространяющихся волн Рэлея. Приводятся результаты расчета передаточных характеристик преобразователя с кольцевым индуктором в режиме возбуждения волны в металлах ферромагнитной группы и в намагниченных вертикальным полем ферромагнетиков.

Given the wording of the boundary problem of elasticity solution results, which simulate the electromagnetic excitation of Raleigh surface waves in a metal half-space. We obtain general relations for calculation of excitation amplitude factor of the Raleigh wave. On the basis of the solutions developed methods of mathematical modeling of electromagnetic transducers in the mode of excitation of the radial propagating Raleigh waves. Results of the calculation of subordinate characteristics transducer with a circular inductor in the mode of excitation waves in a non-ferromagnetic metals group and a vertical field of magnetized ferromagnetic.

Введение. Упругие поверхностные волны являются предметом интенсивных исследований, начиная с работы лорда Рэлея (1885 г.) [1], который впервые показал, что вдоль свободной границы упругого полупространства может распространяться упругая волна с экспоненциально убывающей в поперечном направлении амплитудой. Она не переносит энергию вглубь среды и существует за счет взаимодействия на границе продольной и поперечной упругих волн.

Этот тип волнового движения в настоящее время интенсивно используются для решения широкого круга практических задач в области неразрушающего контроля металлических изделий. Прежде всего, речь идет о дефектологическом исследовании поверхности и толщинометрии. При любом практическом использовании этого типа волн естественным образом возникает вопрос об эффективности их возбуждения и приема в заданном диапазоне частот. Несмотря на то, что в различных научных и технических журналах опубликованы сотни статей, изданы специальные монографии (см., например, [2]), к сожалению, можно утверждать, что в настоящее время отсутствуют содержательные, в смысле практических приложений, модели процесса возбуждения ультразвуковых волн электромагнитным полем в намагниченных металлах. В результате этого отсутствуют соотношения, которые позволяют связать спектр электрического воздействия с размерами

индуктора, чтобы обеспечить наперед заданную эффективность возбуждения поверхностных волн Рэлея на заданной частоте.

Указанные выше пробелы в теоретических основах ультразвуковой дефектоскопии металлов существенным образом тормозят и осложняют развитие технических средств ультразвукового контроля качества поверхности металлоизделий и приборов ультразвуковой толщинометрии [1]. Это обстоятельство явилось побудительным мотивом для позитивного разрешения сформулированных выше проблем и изложения полученных результатов в настоящей статье.

1. Математическая модель электромагнитного возбуждения радиально распространяющихся поверхностных волн Рэлея.

При электромагнитном возбуждении упругих волн в металлах энергия электромагнитного поля, которое проникает в объем металлоизделия, трансформируется в энергию упругих колебаний либо за счет пондеромоторного взаимодействия поля и вещества, т.е. за счет вихретокового механизма образования деформаций [3], либо за счет прямого магнитоstrictionного эффекта [4] в металлах ферромагнитной группы. Для этой группы металлов вихретоковый механизм образования деформаций имеет второстепенное значение. Вне зависимости от механизма образования деформаций, при электромагнитном способе возбуждения упругих колебаний ультразвуковые волны генерируются источниками, которые располагаются на поверхности и в объеме металлоизделия. Таким образом, задача об электромагнитном возбуждении ультразвуковых волн в металлах формируется как граничная задача динамической теории упругости о возбуждении упругих деформаций системой объемных и поверхностных нагрузок. В случае изотропии упругих свойств металла эта задача в математических символах записывается следующим образом:

$$(\lambda + 2G)\text{graddiv}\bar{u} - \text{Grotrot}\bar{u} - \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \bar{f}^* = 0 \forall x_k \in V, \quad (1)$$

$$n_k(\sigma_{kj} - \sigma_{kj}^*) = 0 \forall x_k \in S, \quad (2)$$

где λ и G – константы Ламе или модули упругости изотропного (поликристаллического) металла; \bar{u} – вектор упругого смещения материальных частиц среды (металла) с плотностью ρ_0 ; \bar{f}^* – вектор объемной плотности сил, которые создаются в объеме металла внешними источниками. Для металлов ферромагнитной группы это силы Лоренца, а для ферромагнетиков – это алгебраическая сумма сил Лоренца и сил междоменного взаимодействия (магнитоstrictionные силы), которые пропорциональны градиенту вектора напряженности переменного магнитного поля в объеме ферромагнетика. При записи в граничных условиях (2) приняты следующие обозначения: n_k – k -ый компонент вектора единичной внешней нормали к поверхности S , которая ограничивает объем

металлоизделия V ; σ_{kj} - компонент тензора упругих напряжений, которые возникают на поверхности S в результате деформирования металла; σ_{kj}^* - компоненты поверхностной плотности внешних сил. Для металлов неферромагнитной группы величины σ_{kj}^* суть компоненты тензора Максвелла [5]. для ферромагнетиков σ_{kj}^* является алгебраической суммой компонентов тензора Максвелла и магнитострикционных напряжений, которые пропорциональны компонентам вектора напряженности переменного магнитного поля на поверхности намагниченного ферромагнетика.

Известно [1], что излучающие преобразователи приборов ультразвуковой толщинометрии формируют короткие во времени импульсы электромагнитного поля. Поэтому можно безо всяких оговорок утверждать, что донная поверхность контролируемого металлического объекта не принимает никакого участия в процессе возбуждения ультразвукового импульса. В этом случае реальный объект можно заменить расчетной схемой, которая представляет собой упругое полупространство (см. рис. 1), ограниченное сверху поверхностью $x_3=0$ (x_1, x_2, x_3 - координатные оси декартовой системы координат). Символами ρ, φ, z на рис.1 обозначены координатные оси цилиндрической системы координат, начало которой совмещено с началом декартовой системы координат.

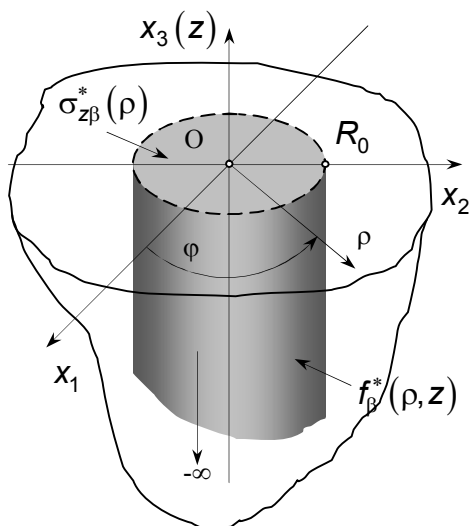


Рис. 1. Расчетная схема для определения амплитудных множителей волн Рэлея

Если на поверхности полупространства $x_3=0$ в круге конечного радиуса R_0 действуют гармонически изменяющиеся во времени по закону $e^{i\omega t}$ ($i = \sqrt{-1}$; ω - круговая частота; t - время) поверхностные нагрузки $\sigma_{z\beta}^*(\rho, t) = \sigma_{z\beta}^*(\rho) e^{i\omega t}$ ($\beta = \rho, z$), а в объеме цилиндра $0 > z > -\infty$, основанием которого является область существования внешних нагрузок $\sigma_{z\beta}^*(\rho)$, действуют внешние силы с объемной плотностью $f_{\beta}^*(\rho, z, t) = f_{\beta}^*(\rho, z) e^{i\omega t}$, то от области приложения внешних сил в периферийные регионы полупространства уходят гармонически изменяющиеся во времени упругие возмущения. Они формируются продольными, поперечными и поверхностными (рэлеевскими) ультразвуковыми волнами.

Амплитуды гармонически изменяющихся во времени по закону $e^{i\omega t}$ смещения $u_{\beta}(\rho, z)$ ($\beta = \rho, z$) материальных частиц полупространства, которые формируются поверхностной волной Рэлея на цилиндрической поверхности $\rho = const$ за пределами области приложения внешних сил, т.е. $\rho > R_0$, определяются следующим образом [6]:

$$u_{\rho}(\rho, z) = A_R^0 u_{\rho}^{0R}(z) H_1^{(2)}(\gamma_R z), \quad u_z(\rho, z) = A_R^0 u_z^{0R}(z) H_0^{(2)}(\gamma_R z), \quad (3)$$

где A_R^0 - амплитудный множитель осесимметричной, радиально распространяющейся волны Рэлея; $u_{\beta}^{0R}(z)$ ($\beta = \rho, z$) - собственные функции однородной граничной задачи (аналитическое описание нормальной волны), которая задается соотношениями (1) и (2) при $\vec{f}^* = 0$ и $\sigma_{kj}^* = 0$, или, говоря иными словами, разрешенные вторым и третьим законами Ньютона формы гармонических колебаний материальных частиц в цилиндрическом сечении $\rho = const$; $H_v^{(2)}(\gamma_R \rho)$ ($v = 0, 1$) - функции Ханкеля второго рода порядка v ; γ_R - волновое число волны Рэлея, которое является корнем уравнения

$$\Delta_R = (\gamma_R^2 + \beta^2)^2 - 4\gamma_R^2 \alpha \beta = 0,$$

Это уравнение, которое часто называют дисперсионным уравнением Рэлея, имеет смысл условия существования волны Рэлея на заданной частоте ω , поскольку волновые числа α и β являются отстающими по фазе на угол $\pi/2$ проекциями волновых векторов \vec{k}_l и \vec{k}_s взаимодействующих на границе $x_3=0$ продольных (\vec{k}_l) и сдвиговых (\vec{k}_s) волн. При этом $\gamma_R^2 - \alpha^2 = \vec{k}_l$ и $\gamma_R^2 - \beta^2 = \vec{k}_s$, а квадраты векторов \vec{k}_l и \vec{k}_s определяются частотой ω и параметрами среды, т.е. $k_l^2 = \frac{\omega^2 \rho_0}{(\lambda + 2G)}$ и $k_s^2 = \frac{\omega^2 \rho_0}{G}$

Собственные функции $u_{\beta}^{0R}(z)$ определяется следующими формулами :

$$u_{\rho}^{0R}(z) = -\gamma_R \left(e^{\alpha z} - \frac{2\alpha\beta}{\gamma_R^2 + \beta^2} e^{\beta z} \right),$$

$$u_z^{0R}(z) = -\alpha \left(e^{\alpha z} - \frac{2\gamma_R^2}{\gamma_R^2 + \beta^2} e^{\beta z} \right).$$

Амплитудный множитель A_R^0 определяется в результате решения граничной задачи (1) и (2), которая для амплитуд u_{ρ} и u_z (список аргументов ρ, z в дальнейших записях будет опущен) не зависящих от полярного угла φ компонентов вектора смещения материальных частиц полупространства записывается следующим образом:

$$\frac{k_s^2}{k_l^2} \left(-\frac{1}{\rho^2} u_{\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho,\rho} + u_{\rho,\rho\rho} + u_{z,\rho z} \right) + u_{\rho,zz} - u_{z,\rho z} + k_s^2 u_{\rho} = \frac{f_{\rho}^*}{G}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} u_{\rho,z} + u_{\rho,\rho z} - \frac{k_l^2}{k_s^2} \left(\frac{1}{\rho} u_{\rho,z} - \frac{1}{\rho} u_{z,\rho} - u_{z,\rho\rho} + u_{\rho,\rho z} \right) + k_l^2 u_z = \frac{f_z^*}{(\lambda + 2G)}, \quad (5)$$

$$\left[\frac{k_s^2}{k_l^2} \left(u_{z,z} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + u_{\rho,\rho} \right) - 2 \left(\frac{1}{\rho} u_{\rho} + u_{\rho,\rho} \right) \right]_{z=0} = \frac{\sigma_{zz}^*}{G}, \quad (6)$$

$$(u_{\rho,z} + u_{z,\rho}) \Big|_{z=0} = \frac{\sigma_{z\rho}^*}{G} \quad (7)$$

При записи уравнений движения (4) и (5), которые имеют смысл второго закона Ньютона в дифференциальной форме и граничных условий (6) и (7), т.е. третьего закона Ньютона в дифференциальной форме, операция дифференцирования обозначена запятой между индексами. При этом запятая отделяет дифференцируемый компонент (его символ проставлен до запятой) от координат (символы после запятой), по которым выполняется дифференцирование.

Предваряя последующее рассуждение, уточним физическое содержание параметра R_0 (см. рис. 1). При электромагнитном способе возбуждения физической реализуемый источник создает переменное магнитное поле, вектор напряженности которого изменяется во времени по гармоническому закону $e^{i\omega t}$ с амплитудой $\vec{H}^*(\rho, z)$. При этом компоненты вектора $\vec{H}^*(\rho, z)$ удовлетворяют следующему предельному условию:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \vec{H}_{\beta}^*(\beta, z), r \vec{H}_{\beta,\beta}^*(\rho, z) \right] = 0, \quad \beta = \rho, z, \quad (8)$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Условие физической реализуемости (8) источника переменного магнитного поля естественным образом влечет за собой условие физической

реализуемости источника внешних нагрузок в краевой задаче (4)-(7), которое можно записать в следующем виде:

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty}} \left[\rho \sigma_{z\beta}^*(\rho), r f_{\beta}^*(\rho, z) \right] = 0, \quad \beta = \rho, z. \quad (9)$$

Рассуждая формально, можно говорить, что параметр $R_0 \rightarrow \infty$. Вместе с тем, практика выполнения расчетов характеристик переменных магнитных полей [7] дает все основания для утверждения о том, что напряженность переменного магнитного поля очень быстро убывает по мере удаления от источника при удалении от источника переменного магнитного поля на расстоянии R_0 равное трем – четырем характерным размерам (для осесимметричного источника характерным размером является диаметр укладки витков провода в индукторе) напряженность поля уменьшается более чем на два порядка. Известно [8], что упругие колебания металлов в присутствии постоянного магнитного поля сопровождаются генерацией электромагнитного поля. При этом параметр R_0 можно определить как расстояние от источника, на котором напряженность переменного поля источника становится на порядок меньше напряженности поля, которое генерируется упругими колебаниями материальных частиц металла. Фактически параметр R_0 , не превосходящий трех - четырех характерных размеров источника переменного магнитного поля в составе ультразвукового преобразователя электромагнитного типа, имеет смысл физической бесконечности для реального источника.

Толкование конечной величины R_0 как физической бесконечности для реального источника внешних нагрузок на ограниченный объем полупространства позволяет применять для решения граничной задачи (1) - (2) метод интегральных преобразований [10] в бесконечных пределах и при этом говорить о решении в виде бегущих волн, которые существуют за пределами области существования внешних нагрузок. В самой области приложенных внешних сил реализуется режим стоячих волн.

Для решения краевой задачи (4) – (7), которая является частным случаем общей формулировки (1) – (2) применим интегральное преобразование Ханкеля [10] с ядром $J_{\nu}(\gamma\rho)$, где $J_{\nu}(\gamma\rho)$ – функция Бесселя целочисленного порядка ν ; γ – параметр интегрального преобразования с размерностью волнового числа. Числовое значение этого параметра определяется в ходе решения задачи. Сама возможность применения преобразования Ханкеля по переменной ρ обеспечивается предельными условиями (8) и (9), из которых естественным образом следует, что на бесконечном удалении от источника энергия поля упругих смещений становится равной нулю, т.е. амплитуды смещений $u_{\beta}(\rho, z)$ и деформаций $u_{\beta,\beta}(\rho, z)$ уменьшаются настолько, что выполняются предельные условия следующего вида

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} [\rho u_\beta(\rho, z), \rho u_{\beta, \beta}(\rho, z)] = 0, \beta = \rho, z. \quad (10)$$

Предположим, что интегральный образ $u_\rho(\gamma, z)$ по Ханкелю радиального компонента $u_\rho(\rho, z)$ вектора смещения материальных частиц металла определяется следующим образом:

$$u_\rho(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho u_\rho(\rho, z) J_1(\gamma \rho) d\rho. \quad (11)$$

В силу предельных условий (10) интеграл (11) ограничен, т.е. существует, и поэтому прямому преобразованию Ханкеля (11) можно поставить в соответствие обратное преобразование, которое определяется следующим образом [10]:

$$u_\rho(\rho, z) = \int_0^\infty \gamma u_\rho(\gamma, z) J_1(\gamma \rho) d\gamma. \quad (12)$$

Так как

$$\int_0^\infty \rho u_{z, \rho}(\rho, z) J_1(\gamma \rho) d\rho = -\gamma \int_0^\infty \rho u_z(\rho, z) J_0(\gamma \rho) d\rho,$$

то целесообразно определить прямое и обратное преобразование Ханкеля для аксиального компонента $u_z(\rho, z)$ вектора смещений в следующем виде

$$u_z(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho u_z(\rho, z) J_0(\gamma \rho) d\rho, \quad (13)$$

$$u_z(\rho, z) = \int_0^\infty \rho u_z(\gamma, z) J_0(\gamma \rho) d\gamma. \quad (14)$$

Воздействуя интегральным преобразованием (11) на уравнение (4) и граничное условие (7), а преобразованием (13) – на уравнение (5) и условие (6), приводим граничную задачу (4) – (7) к следующей форме записи

$$-\alpha^2 \frac{k_S^2}{k_l^2} u_\rho(\gamma, z) + \frac{d^2 u_\rho(\gamma, z)}{dz^2} + \gamma \left(1 - \frac{k_S^2}{k_l^2}\right) \frac{du_z(\gamma, z)}{dz} = \frac{f_\rho^*(\gamma, z)}{G}, \quad (15)$$

$$\gamma \left(1 - \frac{k_l^2}{k_S^2}\right) \frac{du_\rho(\gamma, z)}{dz} - \beta^2 \frac{k_l^2}{k_S^2} u_z(\gamma, z) + \frac{d^2 u_z(\gamma, z)}{dz^2} = \frac{f_z^*(\gamma, z)}{\lambda + 2G}, \quad (16)$$

$$\left\{ \frac{k_S^2}{k_l^2} \left[\frac{du_z(\gamma, z)}{dz} + \gamma u_\rho(\gamma, z) \right] - 2\gamma u_\rho(\gamma, z) \right\} \Big|_{z=0} = \frac{\sigma_{zz}^*(\gamma)}{G}, \quad (17)$$

$$\left[\frac{du_\rho(\gamma, z)}{dz} - \gamma u_z(\gamma, z) \right] \Big|_{z=0} = \frac{\sigma_{z\rho}^*(\gamma)}{G}, \quad (18)$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} f_\rho^*(\gamma, z) \\ \sigma_{z\rho}^*(\gamma) \end{matrix} \right\} = \int_0^\infty \rho \left\{ \begin{matrix} f_\rho^*(\rho, z) \\ \sigma_{z\rho}^*(\rho) \end{matrix} \right\} J_1(\gamma \rho) d\rho, \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{matrix} f_z^*(\gamma, z) \\ \sigma_{zz}^*(\gamma) \end{matrix} \right\} = \int_0^\infty \rho \left\{ \begin{matrix} f_z^*(\rho, z) \\ \sigma_{zz}^*(\rho) \end{matrix} \right\} J_0(\gamma \rho) d\rho. \quad (20)$$

Общие решения системы дифференциальных уравнений (15) и (16) будем искать в следующем виде

$$u_\rho(\gamma, z) = -\gamma [A + A(z)] e^{\alpha z} - \beta [B + B(z)] e^{\beta z} - \gamma C(z) + \beta D(z) e^{-\beta z}, \quad (21)$$

$$u_z(\gamma, z) = \alpha [A + A(z)] e^{\alpha z} + \gamma [B + B(z)] e^{\beta z} - \alpha C(z) e^{-\alpha z} + \gamma D(z) e^{-\beta z}. \quad (22)$$

Потребуем, чтобы функции $A(z)$, ..., $D(z)$, формирующие частное решение неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15) – (16), удовлетворяли условиям минимизации объема вычислений, т.е.

$$-\gamma A'(z) e^{\alpha z} - \beta B'(z) e^{\beta z} - \gamma C'(z) e^{-\alpha z} + \beta D'(z) e^{-\beta z} = 0, \quad (23)$$

$$\alpha A'(z) e^{\alpha z} + \gamma B'(z) e^{\beta z} - \alpha C'(z) e^{-\alpha z} + \gamma D'(z) e^{-\beta z} = 0, \quad (24)$$

где штрих означает производную по координате z .

После подстановки соотношений (21) (22) в уравнения (15) и (16) получаем

$$-\gamma \alpha A'(z) e^{\alpha z} - \beta^2 B'(z) e^{\beta z} + \gamma \alpha C'(z) e^{-\alpha z} - \beta^2 D'(z) e^{-\beta z} = \frac{f_\rho^*(\gamma, z)}{G}, \quad (25)$$

$$\alpha^2 A'(z) e^{\alpha z} + \gamma \beta B'(z) e^{\beta z} + \alpha^2 C'(z) e^{-\alpha z} - \gamma \beta D'(z) e^{-\beta z} = \frac{f_z^*(\gamma, z)}{\lambda + 2G}. \quad (26)$$

Из неоднородной алгебраической системы уравнений (23) – (26) определяем производные искомых функций $A(z)$, ..., $D(z)$ и после интегрирования полученных результатов получаем следующие выражения:

$$A(z) = \frac{1}{2\omega^2 \rho_0} \int_{-\infty}^z \left[-\frac{\gamma}{\alpha} f_\rho^*(\gamma, \xi) e^{-\alpha \xi} + f_z^*(\gamma, \xi) e^{-\alpha \xi} \right] d\xi,$$

$$B(z) = \frac{1}{2\omega^2 \rho_0} \int_{-\infty}^z \left[f_\rho^*(\gamma, \xi) e^{-\beta \xi} + \frac{\gamma}{\beta} f_z^*(\gamma, \xi) e^{-\beta \xi} \right] d\xi,$$

$$C(z) = \frac{1}{2\omega^2 \rho_0} \int_{-\infty}^z \left[-\frac{\gamma}{\alpha} f_\rho^*(\gamma, \xi) e^{-\alpha \xi} - f_z^*(\gamma, \xi) e^{-\alpha \xi} \right] d\xi,$$

$$D(z) = \frac{1}{2\omega^2 \rho_0} \int_{-\infty}^z \left[f_\rho^*(\gamma, \xi) e^{-\beta\xi} - \frac{\gamma}{\beta} f_z^*(\gamma, \xi) e^{-\beta\xi} \right] d\xi. \quad (27)$$

Константы A и B определяются из граничных условий (17)–(18).

Подставляя предполагаемый вид общих решений (21) и (22) в граничные условия (17), (18), получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (\gamma^2 + \beta^2)A + 2\gamma\beta B &= Q_1, \\ -2\gamma\alpha A - (\gamma^2 + \beta^2)B &= Q_2, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\sigma_{zz}^*(\gamma)}{G} - (\gamma^2 + \beta^2)[A(0) + C(0)] - 2\gamma\beta[B(0) - D(0)]; \\ Q_2 &= \frac{\sigma_{z\rho}^*(\gamma)}{G} + 2\gamma\alpha[A(0) - C(0)] + (\gamma^2 + \beta^2)[B(0) + D(0)] \end{aligned}$$

Очевидно, что решение системы уравнений (28) представляется следующим образом:

$$A = -\frac{A_0}{\Delta_R}, \quad B = -\frac{B_0}{\Delta_R}, \quad (29)$$

где $\Delta_R = (\gamma^2 + \beta^2)^2 - 4\gamma^2\alpha\beta$; $A_0 = -(\gamma^2 + \beta^2)Q_1 - 2\gamma\beta Q_2$; $B_0 = 2\gamma\alpha Q_1 + (\gamma^2 + \beta^2)Q_2$.

Выполняя обратное преобразование по формулам (12) и (14), после определения вычета в точке $\gamma = \gamma_R$, когда $\Delta_R = (\gamma_R^2 + \beta^2)^2 - 4\gamma_R^2\alpha\beta = 0$, приходим к соотношениям (3) в которых амплитудный множитель A_R определяется следующим выражением

$$\begin{aligned} A_R^0 &= \frac{\pi i}{2G\Delta'_R(x_R)} \left\{ \frac{(\gamma_R^2 + \beta^2)^2}{k_S^2\alpha} \int_{-\infty}^0 [f_\rho^*(\gamma_R, z)u_\rho^{0z}(z) + f_z^*(\gamma_R, z)u_z^{0R}(z)] dz + \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_R^2 + \beta^2)\sigma_{zz}^*(\gamma_R) + 2\gamma_R\beta\sigma_{z\rho}^*(\gamma_R) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

где $\Delta'_R(x_R) = \alpha\Delta_R(\chi_R) / d\chi_R$; $\chi_R = \gamma_R^2$ интегральные образы $f_\beta^*(\gamma_R, z)$ и $\sigma_{z\beta}^*(\gamma_R)$ ($\beta = \rho, z$) определены выражением (19), (20) при значении параметра интегрального преобразования $\gamma = \gamma_R$.

Интегральные образы внешних силовых факторов $f_\beta^*(\gamma_R, z)$ и $\sigma_{z\beta}^*(\gamma_R)$ определяются амплитудами компонентов вектора напряженности $H_\beta^*(\rho, z)$ переменного магнитного поля, которое формируется в объеме и на поверхности металла преобразователем электромагнитного типа и пространственное распределение которого определяется геометрическими и физическими параметрами преобразователя. По этой причине можно

утверждать, что выражение (30) связывает амплитуду возбуждаемых на заданной частоте ω волн Рэлея с конструктивными параметрами преобразователя электромагнитного типа. Очевидно, что механическим выходом преобразователя электромагнитного типа в режиме возбуждения ультразвуковых волн следует считать произвольно выбранную точку в области существования бегущих волн, т.е. за пределами области приложения внешних сил. В рассматриваемом случае это точка на окружности радиуса $\rho > R_0$, которая находится на расстоянии z от поверхности полупространства. Вектор смещения $\vec{u}(\rho, z, t) = \vec{u}(\rho, z)e^{i\omega t}$ в точке наблюдения можно определить следующим образом

$$\vec{u}(\rho, z)e^{i\omega t} = I_0 e^{i\omega t} \vec{W}(\rho, z, \Pi), \quad (31)$$

где I_0 – амплитуда электрического тока в индукторе (в электрической цепи источника переменного магнитного поля) преобразователя электромагнитного типа; $\vec{W}(\rho, z, \Pi)$ – передаточная характеристика преобразователя в режиме излучения ультразвуковых волн; символом Π в списке аргументов векторной функции $\vec{W}(\rho, z, \Pi)$ обозначен набор геометрических и физико-механических параметров преобразователя. Компоненты векторной функции $\vec{W}(\rho, z, \Pi)$ в данном случае определяются выражениями (3) в которых вместо амплитудного множителя A_R^0 , определенного выражением (30), содержится нормированная величина $\hat{A}_R^0 = A_R^0 / I_0$. Так как выражение (31) связывает входное воздействие на преобразователь (электрический ток) и его отклик (амплитуда вектора смещения материальных частиц в точке наблюдения), то, в соответствии с определением академика А. Н. Тихонова [10], векторную функцию $\vec{W}(\rho, z, \Pi)$ можно назвать обобщенной математической моделью ультразвукового преобразователя электромагнитного типа или математической моделью электромагнитного возбуждения волн Рэлея, которые осесимметрично распространяются в радиально направлении.

2. Математическая модель преобразователя электромагнитного типа с нормальным вектором поля намагничивания.

Для того, чтобы понять роль геометрических и физико-механических параметров ультразвукового преобразователя электромагнитного типа в формировании амплитудных значений смещений материальных частиц металла в возбуждаемой на данной частоте ω поверхностной волне Рэлея, рассмотрим преобразователь, конструкция которого схематически показана на рис.2. Вертикально ориентированное поле подмагничивания, вектор напряженности которого в объеме металлического полупространства (позиция 1 на рис. 2) полностью. Определяется аксиальным компонентом

H_z^0 , создается полюсным наконечником постоянного магнита (позиция 3 на рис.2). Будем полагать, что величина H_z^0 остается неизменной в пределах области существования переменного магнитного поля.

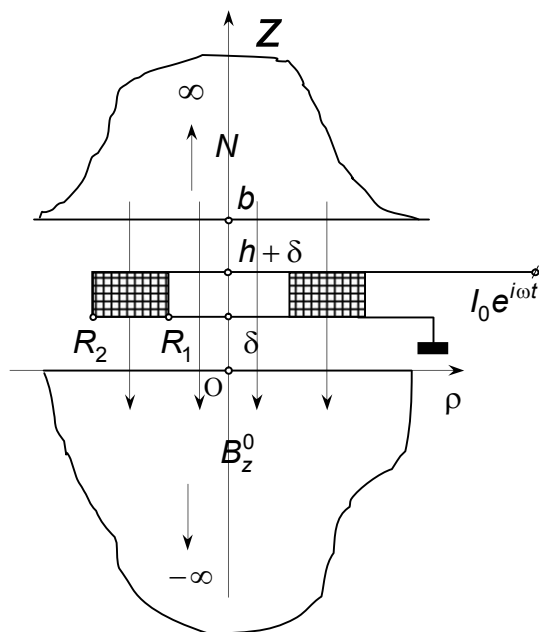


Рис. 2. Расчетная схема преобразователя электромагнитного типа с нормальным полем подмагничивания

Размеры полюсного наконечника в радиальном направлении в четыре – пять превосходят наружный диаметр $2R_2$ укладки витков индуктора (позиция 2 на рис. 2), который имеет форму плоского кольца высотой h и внутренним диаметром $2R_1$. В источнике переменного магнитного поля (индукторе) содержится N витков, по которым протекает переменный электрический ток $i(t) = I_0 e^{i\omega t}$. Так как полюсный наконечник имеет радиальный размер, который значительно превосходит диаметр $2R_2$ индуктора, то, в первом приближении, при выполнении расчетов силовых факторов в полупространстве $-\infty < z \leq 0$ его можно заменить полупространством $\infty > z \geq b$.

Если полупространство $z \leq 0$ заполнено металлом неферромагнитной группы, то в его объеме возникают силы Лоренца, амплитуда объемной плотности которых $f_\rho^*(\rho, z) = \mu_0 J_\varphi^*(\rho, z) H_z^0$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $J_\varphi^*(\rho, z)$ - амплитудное значение окружного компонента вектора

поверхностной плотности вихревого тока, который генерируется переменным магнитным полем с компонентами вектора напряженности $H_\beta^*(\rho, z)$. Амплитуды гармонически изменяются во времени компонентом тензора натяжения Максвелла на поверхности полупространства определяются следующим образом: $\sigma_{z\rho}^*(\rho) = \mu_0 H_\rho^*(\rho, 0) H_z^0$ и $\sigma_{zz}^* = \mu_0 H_z^*(\rho, 0) H_z^0 / 2$. Если полупространство $z \leq 0$ заполнено поликристаллическим ферромагнетиком, то, наряду с пондеромоторными силами электромагнитного поля в его объеме и на поверхности действуют магнитострикционные силы и напряжения, амплитуды которых, в общем случае, определяются следующим образом [4]: $f_i^{MC}(x_k) = -m_{pqij}(H_\rho^0 H_q^*)$; и $\sigma_{ij}^{MC} = m_{pqij} H_\rho^0 H_q^*$, где m_{pqij} – компонент тензора магнитострикционных констант, который для поликристаллического ферромагнетика определяется двумя константами m_2 и m_1 , причем $m_{pqij} = m_2 \delta_{pq} \delta_{ij} + (m_1 - m_2)(\delta_{pi} \delta_{qj} + \delta_{pj} \delta_{qi}) / 2$, где δ_{mn} – символ Кронекера. Так как магнитострикционные константы m_2 и m_1 имеют величины порядка $2, 1$ Гн/м, то, очевидно, отношение $\sigma_{z\rho}^*(\rho) / \sigma_{z\beta}^{MC}$ имеет порядок $4\pi \cdot 10^{-6}$. Из этой оценки следует, что в полях подмагничивания с напряженностью H_z^0 порядка половины коэрцитивной силы, основным механизмом образования деформаций является прямой магнитострикционный эффект.

Применительно к рассматриваемой ситуации амплитуды магнитострикционных напряжений и сил определяются следующим образом:

$$\sigma_{zz}^{MC}(\rho) = -m_1 H_z^0 H_z^*(\rho, 0); \quad \sigma_{z\rho}^{MC}(\rho) = -(m_1 - m_2) H_z^0 H_z^*(\rho, 0);$$

$$f_\rho^{MC}(\rho, z) = -m_2 H_z^0 H_z^*(\rho, z) - (m_1 - m_2) H_z^0 H_{\rho,z}^*,$$

$$f_z^{MC}(\rho, z) = -(m_1 - m_2) H_z^0 (H_{\rho,\rho}^* + H_\rho^* / \rho) - m_1 H_z^0 H_{z,z}^*,$$

где запятая между индексами по-прежнему означает дифференцирование.

Интегральные образы поверхностных и объемных нагрузок определяются следующими соотношениями:

а) металлы неферромагнитной группы:

$$f_\rho^*(\gamma_R, z) = \mu_0 H_z^0 \int_0^\infty \rho J_\varphi^*(\rho, z) J_1(\gamma_R \rho) d\rho, \quad (32)$$

$$\sigma_{\rho z}^*(\gamma_R) = \mu_0 H_z^0 H_\rho^*(\gamma_R, 0); \quad \sigma_{zz}^*(\gamma_R) = \mu_0 H_z^0 H_z^*(\gamma_R, 0) / 2; \quad (33)$$

б) поликристаллические ферромагнетики:

$$f_\rho^*(\gamma_R, z) = f_\rho^{MC}(\gamma_R, z) = m_1 \gamma_R H_z^0 H_z^*(\gamma_R, z) - (m_1 - m_2) H_z^0 \frac{dH_\rho^*(\gamma_R, z)}{dz},$$

$$f_{\rho}^*(\gamma_R, z) = f_{\rho}^{MC}(\gamma_R, z) = -(m_1 - m_2)\gamma_R H_z^0 H_z^*(\gamma_R, z) - m_1 H_z^0 \frac{dH_{\rho}^*(\gamma_R, z)}{dz}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z\rho}^*(\gamma_R) &= \sigma_{z\rho}^{MC}(\gamma_R) = -(m_1 - m_2)H_z^0 H_z^*(\gamma_R, 0), \\ \sigma_{zz}^*(\gamma_R) &= \sigma_{zz}^{MC}(\gamma_R) = -m_1 H_z^0 H_z^*(\gamma_R, 0), \end{aligned} \quad (35)$$

где интегральные образы компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля определяются следующим образом:

$$\begin{cases} H_{\rho}^*(\gamma_R, z) \\ H_z^*(\gamma_R, z) \end{cases} = \int_0^{\infty} \rho \begin{cases} H_{\rho}^*(\gamma_R, z) J_1(\gamma_R \rho) \\ H_z^*(\gamma_R, z) J_0(\gamma_R \rho) \end{cases} d\rho. \quad (36)$$

Из всего сказанного выше следует, что амплитудный множитель A_R^0 поверхностной волны Рэлея, которая возбуждается электромагнитным способом, определяется не компонентами вектора напряженности переменного магнитного поля, а их интегральными образами по Ханкелю. По этой причине будем искать решение уравнений Максвелла, которые определяют характеристики электромагнитного поля, в терминах интегральных образов амплитудных значений $H_{\beta}^*(\gamma_R, z)$ компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля.

Определим вначале параметры переменного магнитного поля в воздушном зазоре между металлическим полупространством и полюсным наконечником постоянного магнита, т.е. в области $(0 \leq z \leq b, 0 \leq \rho \leq \infty)$.

Следуя уравнениям Максвелла, введем гармонически изменяющийся во времени по закону $e^{i\omega t}$ векторный потенциал, амплитудное значение которого полностью определяются окружным компонентом $A_{\varphi}(\rho, z)$. Так как $rot \vec{A} = \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, где \vec{B} и \vec{H} векторы магнитной индукции и напряженности переменного магнитного поля в воздушном зазоре, то из уравнения Максвелла $rot \vec{H} = \vec{J}^*$, где \vec{J}^* - вектор поверхностной плотности сторонних, т.е. сформированных с помощью каких-либо устройств, токов проводимости в объеме воздушного зазора, следует уравнение, которое определяет аналитические свойства функции $A_{\varphi}(\rho, z)$:

$$-A_{\varphi,zz} + \frac{1}{\rho^2} A_{\varphi} - \frac{1}{\rho} A_{\varphi,\rho} - A_{\varphi,\rho\rho} = \mu_0 J_{\varphi}^*(\rho, z), \quad (37)$$

где запятая между индексами означает операцию дифференцирования; $J_{\varphi}^*(\rho, z)$ - амплитуда окружного компонента вектора поверхностной плотности сторонних токов, причем

$$J_{\varphi}^*(\rho, z) = \frac{I_0 N}{h(R_2 - R_1)} f_1(\rho) f_2(z), \quad (38)$$

где

$$f_1(\rho) = \begin{cases} 1 \forall \rho \in [R_1, R_2], \\ 0 \forall \rho \notin [R_1, R_2], \end{cases} \quad f_2(z) = \begin{cases} 1 \forall z \in [\delta, h + \delta], \\ 0 \forall z \notin [\delta, h + \delta]. \end{cases}$$

Определим интегральный образ функции $A_{\varphi}(\rho, z)$ по Ханкелю следующим образом

$$A_{\varphi}(\gamma_R, z) = \int_0^{\infty} \rho A_{\varphi}(\rho, z) J_1(\gamma_R \rho) d\rho, \quad (39)$$

Воздействуя преобразованием (39) на дифференциальное уравнение (37) в частных производных, приводим его к обыкновенному уравнению в частных производных следующего вида

$$-\frac{d^2 A_{\varphi}(\gamma_R, z)}{dz^2} + \gamma_R^2 A_{\varphi}(\gamma_R, z) = \mu_0 J_{\varphi}^*(\gamma_R, z), \quad (40)$$

где

$$J_{\varphi}^*(\gamma_R, z) = \frac{I_0 N}{h(R_2 - R_1)} f_2(z) \int_0^{\infty} \rho f_1(\rho) J_1(\gamma_R \rho) d\rho = \frac{I_0 N}{\gamma_R h} f_2(z) W(\gamma_R, R_1, R_2)$$

Функция $W(\gamma_R, R_1, R_2)$ определяет влияние радиальных размеров индуктора на эффективность возбуждения волн Рэлея на данной частоте ω . Формула для расчета значений функции $W(\gamma_R, R_1, R_2)$ имеет следующий вид:

$$W(\gamma_R, R_1, R_2) = \frac{\pi}{2(1 - R_1/R_2)} \left[\Xi(\gamma_R R_2) - \frac{R_1}{R_2} \Xi(\gamma_R R_1) \right], \quad (41)$$

где $\Xi(\gamma_R R_k) = I_1(\gamma_R R_k) H_0(\gamma_R R_k) - I_0(\gamma_R R_k) H_1(\gamma_R R_k)$; $k=1,2$; $H_{\nu}(\gamma_R R_k)$ - функции Струве порядка $\nu=0,1$ [11].

Решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (40) осуществляется по стандартной схеме вариации постоянных [13]. Конечный результат вычислений можно записать в следующем виде

$$A_{\varphi}(\gamma_R, z) = [A + A(z)] e^{-\gamma_R z} + [B + B(z)] e^{-\gamma_R \delta}, \quad (42)$$

где A и B - подлежащие определению константы:

$$\begin{aligned} A(z) &= \mu_0 \frac{I_0 N}{2\gamma_R^3 h} W(\gamma_R, R_1, R_2) [e^{\gamma_R z} - e^{\gamma_R \delta}], \\ B(z) &= \mu_0 \frac{I_0 N}{2\gamma_R^3 h} W(\gamma_R, R_1, R_2) [e^{-\gamma_R z} - e^{-\gamma_R \delta}], \end{aligned} \quad (43)$$

где δ - толщина воздушного зазора между индуктором и поверхностью металлического полупространства (см. рис.2)

Интегральные образы амплитудных значений компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля в области между постоянным

магнитом и поверхностью металлического полупространства определяются следующим образом

$$H_\rho(\gamma_R, z) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dA_\phi(\gamma_R, z)}{dz} = -\frac{\gamma_R}{\mu_0} \left\{ [A + A(z)]e^{-\gamma_R z} + [B + B(z)]e^{\gamma_R z} \right\}, \quad (44)$$

$$H_z(\gamma_R, z) = \frac{\gamma_R}{\mu_0} A_\phi(\gamma_R, z) = \frac{\gamma_R}{\mu_0} \left\{ [A + A(z)]e^{-\gamma_R z} + [B + B(z)]e^{\gamma_R z} \right\}, \quad (45)$$

где варьируемые константы $A(z)$ и $B(z)$ определены соотношением (43).

На границах раздела сред с различными электрическими и магнитными параметрами должны выполняться условия сопряжения касательных составляющих векторов напряженности магнитных полей и нормальных составляющих векторов магнитной индукции [6] полей, которые существуют по обе стороны границы. Применительно к расчетной схеме, которая показана на рис.2, эти условия записываются следующим образом:

$$H_\rho(\gamma_R, b) = H_\rho^{nm}(\gamma_R, b), \quad \mu_0 H_z(\gamma_R, b) = \mu_{33}^{nm} H_z^{nm}(\gamma_R, b), \quad (46)$$

$$H_\rho(\gamma_R, 0) = H_\rho^*(\gamma_R, 0), \quad \mu_0 H_z(\gamma_R, 0) = \mu_{33}^{nm} H_z^*(\gamma_R, 0), \quad (47)$$

где $H_\beta^{nm}(\gamma_R, b)$ ($\beta = \rho, z$) – интегральные образы амплитудных значений компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля в объеме постоянного магнита (верхний слой ПМ); $H_\rho^*(\gamma_R, 0)$ – интегральные образы компонентов вектора напряженности магнитного поля в объеме металлического полупространства; μ_{33}^{nm} и μ_{33} – компоненты тензора магнитной проницаемости магнита и металла соответственно.

Приступая к расчету величины $H_\beta^{nm}(\gamma_R, z)$ и $H_\beta^*(\gamma_R, z)$ условимся, что матрицы тензоров магнитной проницаемости $\mu_{ij}^{(nm)}$ и удельной электрической проводимости $r_{ij}^{(nm)}$ материала постоянного магнита (верхний индекс ПМ) и металла (без верхнего индекса) имеют диагональный вид, т.е.

$$\left\| \mu_{ij}^{(nm)} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \mu_{11}^{(nm)} & 0 & 0 \\ & \mu_{22}^{(nm)} & 0 \\ & & \mu_{33}^{(nm)} \end{array} \right\|, \quad \left\| r_{ij}^{(nm)} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} r_{11}^{(nm)} & 0 & 0 \\ & r_{22}^{(nm)} & 0 \\ & & r_{33}^{(nm)} \end{array} \right\|. \quad (48)$$

Рассмотрим процедуру определения величин $H_\beta^{nm}(\gamma_R, z)$.

Амплитудные значения компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля $H_\beta^{nm}(\rho, z)$ в объеме постоянного магнита удовлетворяют квазистационарным уравнениям Максвелла, которые записываются следующим образом:

$$\text{rot} \vec{H}^{nm} = \vec{J}^{nm}, \quad \text{rot} \vec{E}^{nm} = -i\omega \vec{B}^{nm}, \quad (49)$$

где \vec{J}^{nm} – амплитудные значения поверхностных плотностей тока проводимости в объеме постоянного магнита, причем k -й компонент этого вектора определяется следующим образом: $\vec{J}_k^{nm} = r_{kj} E_j^{nm}$, где E_j^{nm} – амплитуда j -ого компонента вектора \vec{E}^{nm} напряженности переменного электрического поля в объеме постоянного магнита; \vec{B}^{nm} – амплитуда вектора магнитной индукции, причем $B_k^{nm} = \mu_{kj} H_j^{nm}$.

Так как электромагнитное поле, которое создается индуктором в объеме постоянного магнита, обладает осевой симметрией, то система уравнений Максвелла (49) может быть приведена к следующему виду:

$$-H_{\rho,zz}^{nm} + H_{z,\rho\rho}^{nm} = -i\omega \mu_{11}^{nm} r_{22}^{nm} H_\rho^{nm}, \quad (50)$$

$$\frac{1}{\rho} H_{\rho,z}^{nm} - \frac{1}{\rho} H_{z,\rho}^{nm} + H_{\rho,z\rho}^{nm} - H_{z,\rho\rho}^{nm} = -i\omega \mu_{33}^{nm} r_{22}^{nm} H_z^{nm}. \quad (51)$$

При записи уравнений (50) и (51) было учтено, что материальные константы μ_{ij} и $r_{ij}^{(nm)}$ заданы матрицами (48). Уравнение (50) подвергнем интегральному преобразованию Ханкеля с ядром $J_1(\gamma_R \rho)$, а уравнение (51) – преобразованию с ядром $J_0(\gamma_R \rho)$. При этом интегральные образы $H_\beta^{nm}(\gamma_R, z)$ определяются как обычно, т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} H_\rho^{nm}(\gamma_R, z) \\ H_z^{nm}(\gamma_R, z) \end{array} \right\} = \int_0^\infty \rho \left\{ \begin{array}{l} H_\rho^{nm}(\rho, z) J_1(\gamma_R \rho) \\ H_z^{nm}(\rho, z) J_0(\gamma_R \rho) \end{array} \right\} d\rho$$

С учетом сделанных определений. Система уравнений (50), (52) может быть записана следующим образом:

$$-\frac{d^2 H_\rho^{nm}(\gamma_R, z)}{dz^2} - \gamma_R \frac{dH_z^{nm}(\gamma_R, z)}{dz} = -i\omega \mu_{11}^{nm} r_{22}^{nm} H_\rho^{nm}(\gamma_R, z), \quad (52)$$

$$\frac{dH_\rho^{nm}(\gamma_R, z)}{dz} = -\xi_{nm}^2 H_z^{nm}(\gamma_R, z), \quad (53)$$

где $\xi_{nm}^2 = \gamma_R^2 + i\omega \mu_{33}^{nm} r_{22}^{nm}$.

Из уравнения (53) с очевидностью следует, что

$$H_z^{nm}(\gamma_R, z) = -\frac{\gamma_R}{\xi_{nm}^2} \frac{dH_\rho^{nm}(\gamma_R, z)}{dz}. \quad (54)$$

Подставляя выражение (54) в уравнение (52), получаем

$$\frac{d^2 H_\rho^{nm}(\gamma_R, z)}{dz^2} - \zeta_{nm}^2 H_\rho^{nm}(\gamma_R, z) = 0, \quad (55)$$

где $\zeta_{nm}^2 = \frac{\mu_{11}^{nm}}{\mu_{33}^{nm}} \xi_{nm}^2$.

Непротиворечащее физическому смыслу решение уравнение (55) имеет следующий вид

$$H_\rho^{nm}(\gamma_R, z) = C e^{-\zeta_{nm} z}, \quad (56)$$

Где C – подлежащая константа. При этом

$$H_\rho^{nm}(\gamma_R, z) = \frac{\gamma_R \zeta_{nm}}{\xi_{nm}^2} C e^{-\zeta_{nm} z}. \quad (57)$$

Амплитудные значения интегральных образов компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля $H_\beta^*(\gamma_R, z)$ в объеме металлического полупространства определяются в полном соответствии с изложенной выше методикой определения величин $H_\beta^{nm}(\gamma_R, z)$. Опуская промежуточные выкладки, запишем конечный результат:

$$H_\rho^*(\gamma_R, z) = D e^{-\zeta z}, \quad H_\rho^*(\gamma_R, z) = -\frac{\gamma_R \zeta}{\xi^2} D e^{-\zeta z}, \quad (58)$$

где D – подлежащая определению константа; $\zeta^2 = \frac{\mu_{11}}{\mu_{33}} \xi^2$, $\xi^2 = \gamma_R^2 + i\omega\mu_{33}r_{22}$.

Таким образом, в составе математического описания амплитудных значений интегральных образов компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля $H_\beta^{nm}(\gamma_R, z)$, $H_\beta(\gamma_R, z)$ и $H_\beta^*(\gamma_R, z)$ ($\beta = \rho, z$) входят четыре константы A , B , C и D , которые единственным образом определяются из граничных условий (46) и (47). Решая неоднородную систему из четырех алгебраических уравнений относительно константы D , получаем следующий результат

$$D = \frac{I_0 N}{2\gamma} W(\gamma_R, \delta, h, R_1, R_2) F(\gamma_R b, \Pi), \quad (59)$$

где $W(\gamma_R, \delta, h, R_1, R_2)$ – частотно зависящая функция, которая определяет влияние геометрических параметров индуктора (источника переменного магнитного поля) на уровень возбуждаемого в металлическом полупространстве переменного магнитного поля; $F(\gamma_R b, \Pi)$ – функция, которая определяет влияние постоянного магнита. Входящие в состав выражения (59) функции определяются следующими выражениями:

$$W(\gamma_R, \delta, h, R_1, R_2) = W(\gamma_R, R_1, R_2) \frac{(1 - e^{-\gamma_R h})}{\gamma_R h} e^{-\gamma_R \delta}, \quad (60)$$

$$F(\gamma_R b, \Pi) = \frac{e^{\gamma_R b} [e^{-\gamma_R (2b - 2\delta - h)} (1 - \beta_1) - 1 - \beta_1]}{2[(1 + \beta_1 \beta_2) sh \gamma_R b + (\beta_1 + \beta_2) ch \gamma_R b]}, \quad (61)$$

где $\beta_1 = \frac{\mu_{33}^{nm} \gamma_R \zeta_{nm}}{\mu_0 \xi_{nm}^2}$; $\beta_2 = \frac{\mu_{33} \gamma_R \zeta_{nm}}{\mu_0 \xi^2}$.

После определения константы D и подстановки ее значения, заданного соотношения (59), в определения (58) величин $H_\beta^*(\gamma_R, z)$, можно определить амплитудные значения интегральных образов внешних силовых факторов, которые заданы соотношениями (32) – (35), а затем, после подстановки значений $f_\beta^*(\gamma_R, z)$ и $\sigma_{z\beta}^*(\gamma_R)$ ($\beta = \rho, z$) в формулу (30), определить амплитудный множитель рэлеевской волны. Выполнив все необходимые вычисления, можно записать следующие результаты.

Для вихретокового механизма возбуждения поверхностных волн Рэля (металл неферромагнитной группы) имеем

$$A_R^0 = \frac{I_0 U_0^j(\omega, \Pi)}{\gamma_R}, \quad (62)$$

где $U_0^j(\omega, \Pi)$ – эффективность преобразователя электромагнитного типа в режиме возбуждения поверхностных волн Рэля в металлах неферромагнитной группы; размерность передаточной функции $U_0^j(\omega, \Pi)$ – м/А; символом Π в списке аргументов обозначен набор параметров преобразователя. Частотно зависящая эффективность преобразователя определяется следующим выражением

$$U_0^j(\omega, \Pi) = -\frac{i\pi\mu_0}{4G} H_z^0 NW(\omega, \Pi) F_n(\omega, \alpha, \beta), \quad (63)$$

где $W(\omega, \Pi) = W(\gamma_R, \delta, h, R_1, R_2) F(\gamma_R b, \Pi)$ – частотно зависящая функция, которая определяет влияние геометрических и физических параметров преобразователя (символ Π) на амплитудные значения возбуждаемых волн Рэля; $F_n(\omega, \alpha, \beta)$ – практически постоянная величина, которая определяется физико-механическими параметрами металла. Функция $F_n(\omega, \alpha, \beta)$, которая зависит от частоты только в области низких частот, определяется следующим соотношением

$$F_n(\omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{\Lambda_0 k_S^2 \alpha} f_1(\omega, r_{22}) f_\rho(\omega, \alpha, \beta) (1 - \eta_n),$$

где $\Lambda_0 = 2 - [4\gamma_R^4 - 3\gamma_R^2(1 + \chi)k_S^2 + 2\chi k_S^4] / [\alpha\beta(\gamma_R^2 + \beta^2)]$ - фрагмент производной $\Delta'_R(\chi_R)$; $\chi = (1 - 2\nu) / [2(1 - \nu)]$; ν - коэффициент Пуассона поликристаллического (изотропного) металла; $f_1(\omega, r_{22}) = i\omega\mu_{33}r_{22}\zeta / \xi^2 \approx \zeta$, поскольку $\omega\mu_{33}r_{22} \gg \gamma_R^2$ и $\xi^2 \approx i\omega\mu_{33}r_{22}$;

$$f_\rho(\omega, \alpha, \beta) = \gamma_R(\gamma_R^2 + \beta^2) / (\alpha + \zeta) - 2\alpha\beta\gamma_R / (\beta + \zeta) \approx \gamma_R(\gamma_R^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) / \zeta;$$

$$\eta_n = \frac{k_S^2\alpha}{\gamma_R(\gamma_R^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)} \left(\frac{2\beta\gamma_R}{\gamma_R^2 + \beta^2} - \frac{\gamma_R\zeta}{2\xi^2} \right) \approx \frac{2k_S^2\alpha\beta}{(\gamma_R^2 + \beta^2)(\gamma_R^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)}$$

независящая от частоты константа, которая определяется модулями упругости поликристаллического металла.

Для металлов ферромагнитной группы основным механизмом образования деформации является прямой магнитоstrictionный эффект и амплитудный множитель рэлеевской волны определяется следующим образом

$$A_R^0 = \frac{I_0 U_0^{mc}(\omega, \Pi)}{\gamma_R}, \quad (64)$$

где $U_0^{mc}(\omega, \Pi)$ - эффективность преобразователя электромагнитного типа в режиме возбуждения поверхностных волн Рэлея в намагниченных постоянным во времени вертикальным магнитным полем ферромагнетиках. Выражение для расчета функции $U_0^{mc}(\omega, \Pi)$ имеет следующий вид

$$U_0^{mc}(\omega, \Pi) = \frac{i\pi m_1}{4G} H_z^0 N W(\omega, \Pi) F_{mc}(\omega, \alpha, \beta), \quad (65)$$

$$\text{где } F_{mc}(\omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{\Lambda_0 k_S^2 \alpha} [f_\rho^{mc}(\omega, \alpha, \beta) + f_z^{mc}(\omega, \alpha, \beta) + f_\sigma^{mc}(\omega, \alpha, \beta)];$$

$$\text{где } f_\rho^{mc}(\omega, \alpha, \beta) = (\gamma_R^2 + \beta^2) \zeta \left[\frac{\gamma_R^2}{\xi^2} + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \left[\frac{\gamma_R^2}{\alpha + \zeta} - \frac{2\alpha\beta\gamma_R^2}{(\gamma_R^2 + \beta^2)(\beta + \zeta)} \right] \right];$$

$$f_z^{mc}(\omega, \alpha, \beta) = -(\gamma_R^2 + \beta^2) \gamma_R^2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1} - \frac{\zeta^2}{\xi^2} \right) \left[\frac{\alpha}{\alpha + \zeta} - \frac{2\alpha\gamma_R^2}{(\gamma_R^2 + \beta^2)(\beta + \zeta)} \right];$$

$$f_\sigma^{mc}(\omega, \alpha, \beta) = k_S^2 \alpha \left[\frac{\gamma_R \zeta}{\xi^2} + \frac{2\gamma_R \beta}{\gamma_R^2 + \beta^2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \right] - \text{составляющие амплитудного}$$

множителя обусловленные действием объемных и поверхностных нагрузок в намагниченном ферромагнетике.

Подставляя определенные соотношения (62) и (64) амплитудные множители A_R^0 в формулы (3) и сравнивая полученный результат с

определением (31) передаточной характеристики преобразователя электромагнитного типа, приходим к соотношениям для расчета компонентов векторной функции $\vec{W}(\rho, z, \Pi)$. Радиальный $W_\rho(\rho, z, \Pi)$ и аксиальный $W_z(\rho, z, \Pi)$ компоненты векторной передаточной характеристики преобразователя рассчитываются по следующим формулам:

$$W_\rho^{(l, mc)}(\rho, z, \Pi) = U_0^{(l, mc)}(\omega, \Pi) \left(e^{\alpha z} - \frac{2\alpha\beta}{\gamma_R^2 + \beta^2} e^{\beta z} \right) H_1^{(2)}(\gamma_R \rho),$$

$$W_z^{(l, mc)}(\rho, z, \Pi) = -U_0^{(l, mc)}(\omega, \Pi) \frac{\alpha}{\gamma_R} \left(e^{\alpha z} - \frac{2\gamma_R^2}{\gamma_R^2 + \beta^2} e^{\beta z} \right) H_0^{(2)}(\gamma_R \rho). \quad (66)$$

Выбор того или иного верхнего индекса в формулах (66) определяется, естественно, типом металла.

Рассмотрим количественное и качественное содержание выражений (66).

Фазовые функции $H_\nu^{(2)}(\gamma_R \rho)$ ($\nu=0,1$) при $\gamma_R \rho \geq 10$ достаточно точно [11] определяются через элементарные функции, т.е. $H_\nu^{(2)}(\gamma_R \rho) = \sqrt{2 / (\pi \gamma_R \rho)} e^{-i(\gamma_R \rho - \nu\pi / 2 - \nu\pi / 4)}$, и вместе с фазовым множителем $e^{i\omega t}$ описывают уходящую от источника цилиндрическую волну.

Заключенный в круглые скобки сомножитель при функции $H_1^{(2)}(\gamma_R \rho)$ в первом соотношении (66) и умноженный на отношение α/γ_R сомножитель при функции $H_0^{(2)}(\gamma_R \rho)$ во второй формуле (66) определяют смещения материальных частиц полупространства в произвольном поперечном сечении $\rho = const$. Если вместо координаты z ввести нормированную величину $\hat{z} = z / \lambda$, где λ - длина волны Рэлея, то эти сомножители перестают зависеть от частоты и изменяются по мере погружения вглубь полупространства так, как это показано на рис. 3. Отчетливо видно, что заметные уровни смещений материальных частиц наблюдаются в узком, шириной в одну длину волны, приповерхностном слое полупространства. В нем сосредоточена практически вся энергия, которая переносится волной Рэлея. Рассмотрим сомножители

$U_0^{(l, mc)}(\omega, \Pi)$. Они имеют практически одинаковую конструкцию. Входящие в их состав сомножители $F_l(\omega, \alpha, \beta)$ и $F_{mc}(\omega, \alpha, \beta)$ в области средних и высоких частот, когда $i\omega\mu_{33}r_{22} \gg \gamma_R^2$, приобретают смысл констант, которые для металла с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ равно $-0,146$ и $-0,735$ соответственно. При этом $\gamma_R = 1,079k_S$, $\alpha = 0,891k_S$, $\beta = 0,281k_S$, $\Lambda_0 = -2,83$.

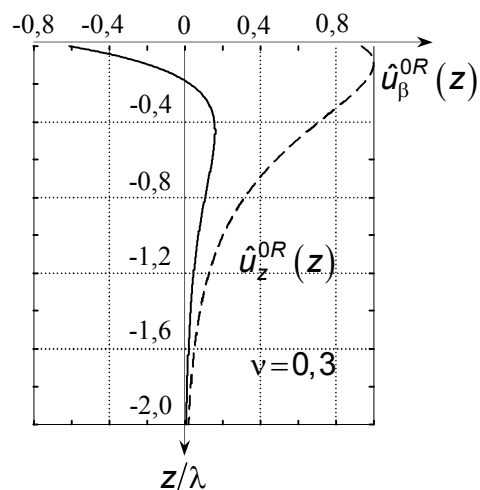


Рис. 3. Изменение амплитуд смещений материальных частиц по глубине полупространства

Особый интерес представляет функция $W(\omega, \Pi)$, которая имеет одну и ту же конструкцию как для металла неферромагнитной группы, так и для ферромагнетика. Это функция определяет влияние геометрических и физических параметров преобразователя на эффективность возбуждения поверхностных волн Рэлея на различных частотах. Входящая в состав функции $W(\omega, \Pi)$ аналитическая конструкция $F(\gamma_R b, \Pi)$ определяет влияние вихревых токов (скин-эффект) на эффективность работы преобразователя электромагнитного типа. На рис.4 показаны две группы кривых, рассчитанные при значении параметра $b = 0,2R_2$ (цифра 0,2 возле кривых) и $b = R_2$ (цифра 1 возле кривых). Мерой частоты, которая откладывается по горизонтальной оси рис.4, является безразмерное волновое число $\gamma_R R_2$. При выполнении вычислений были приняты следующие значения параметров: $R_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м; $h = 0,1R_2$; $\delta = 0,1R_2$. Материал постоянного магнита имеет удельную электрическую проводимость феррита $r_{22}^{NM} = 1$ См/м и магнитную проницаемость $\mu_{11}^{NM} = \mu_{33}^{NM} = 1000\mu_0$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума). Алюминий наделен следующими параметрами: плотность $\rho_0 = 2,69 \cdot 10^3$ кг/м³; модуль сдвига $G = (25 \div 26,5)$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; магнитная проницаемость равна проницаемости вакуума, т.е. μ_0 ; удельная электрическая проводимость $r_{22} = 40 \cdot 10^6$ См/м. Второй металл – ферромагнетик – углеродистая сталь средней прочности

имеет следующие параметры: плотность $\rho_0 = (7,77 \div 7,85) \cdot 10^3$ кг/м³; модуль сдвига $G = (77 \div 81)$ ГПа; магнитная проницаемость $\mu_{11} = \mu_{33} = 50\mu_0$; удельная электрическая проводимость $r_{22} = 1,25 \cdot 10^6$ См/м. По оси ординат на рис.4 отложен модуль функции $F(\gamma_R b, \Pi)$. Отчетливо видно, что при больших значениях параметра b особых отличий в изменении значений функции $F(\gamma_R b, \Pi)$ для двух разных металлов не наблюдается. Более того, далеко расположенный наконечник постоянного магнита загоняет рабочие частоты преобразователя в область низких частот. Это можно объяснить тем, что переменное магнитное поле индуктора формирует в объеме постоянного магнита вторичный источник переменного магнитного поля. Этот вторичный источник формирует вторичное переменное магнитное поле, которое существует в круге радиуса R_0 , размеры которого уже определяются радиальными размерами полюсного наконечника. Так как радиус полюсного наконечника постоянного магнита в несколько раз превышает радиус укладки витков индуктора, то можно утверждать, что действие вторичного источника в далеко расположенном от поверхности металлического полупространства полюсном наконечнике приводит к существенному увеличению размеров области существования нагрузок на поверхности и в объеме металлического полупространства. Любое увеличение размеров области нагружения сопровождается уменьшением полосы рабочих частот преобразователя и перемещением этой полосы в область низких частот. Впервые на это обстоятельство было указано в работе [13]. При уменьшении параметра b эффект «расползания» области существования внешних сил становится не так ярко выраженным, но, «благодаря» скин-эффекту, присутствует.

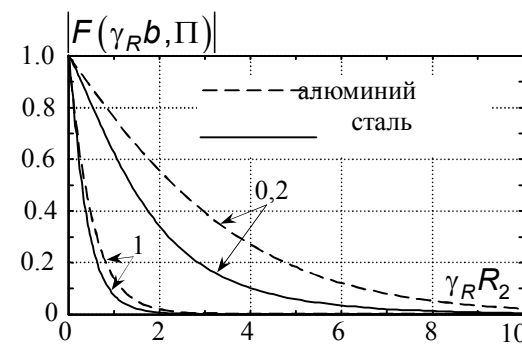


Рис. 4. Частотные потери из-за вихревых токов в системе постоянный магнит – индуктор – металлическое полупространство

На рис.5 показаны графики модуля функции $W(\omega, \Pi)$, значения которой рассчитывались в предположении, что индуктор радиуса $R_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м располагается на расстоянии $\delta = 0,1R_2$ над поверхностью полупространства из

алюминия. Толщина индуктора $h=0,1 R_2$. Индуктор приклеен к поверхности полосного наконечника из феррита с параметрами $\mu_{11}^{ii} = \mu_{33}^{ii} = 1000\mu_0$; $r_{22}=1$ См/м. По оси абсцисс откладывается безразмерное волновое число $\gamma_R R_2$. Варьируемые параметром семействами кривых на рис.5 является величина R_1 – внутренний радиус укладки витков индуктора, причем $R_1=nR_2$, где n – число, которое проставлено возле соответствующей кривой. При $n=0,999$, что соответствует бесконечно тонкому кольцу, числовые значения функции $W(\omega, \Pi)$ отражают предельные, в смысле частотных свойств, возможности преобразователя электромагнитного типа. По мере увеличения ширины индуктора (уменьшение радиуса R_1) наблюдается незначительное расширение полосы рабочих частот. При этом эффективность возбуждения упругих волн в целом уменьшается.

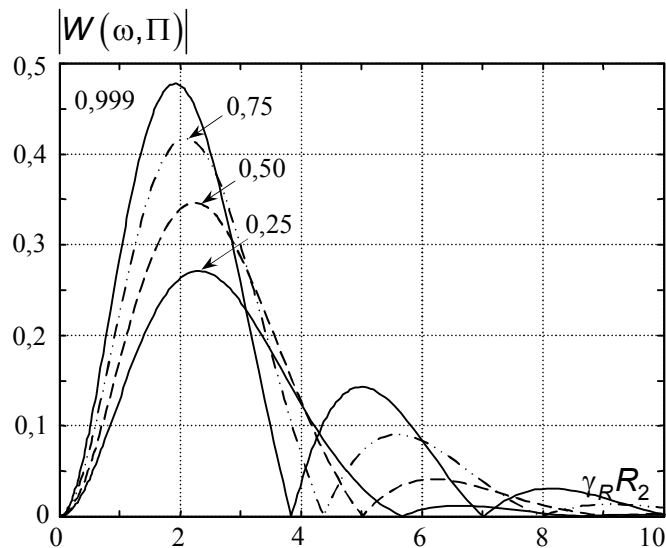


Рис. 5. Влияние геометрических и магнитоэлектрических параметров преобразователя на эффективность возбуждения волн Рэлея на различных частотах

Последнее, на что необходимо обратить внимание, это соотношение двух механизмов образования деформаций в металлах. В металлах неферромагнитной группы деформации формируются вихретоковым механизмом. Он является единственным и его эффективность сравнивать не с чем. В ферромагнетике одновременно работают два механизма – это пондеромоторное действие электромагнитного поля (вихретоковый механизм) и прямой магнитоэлектрический эффект. Сравнивая между собой

выражения (63) и (65) нетрудно заметить, что отношение $|U_0^{mc}(\omega, \Pi)/U_0^a(\omega, \Pi)| = m_1 / \mu_0$, при правильном выбранном значении напряженности поля подмагничивания H_z^0 магнитоэлектрическая константа m_1 может достигать значений 0,1 Гн/м. Отсюда следует, что $m_1 / \mu_0 = 10^6 / 4\pi$, т.е. деформация ферромагнетика из-за прямого магнитоэлектрического эффекта более чем на пять порядков могут превышать деформации, которые возникают из-за пондеромоторного действия электромагнитного поля.

Выводы. В работе впервые построена математическая модель преобразователя электромагнитного типа в режиме возбуждения поверхностных волн Рэлея, которая связывает амплитуду гармонически изменяющегося во времени электрического тока в индукторе с амплитудами компонентов вектора смещений материальных частиц металла в произвольно выбранной точке наблюдения за пределами области существования переменного магнитного поля. При этом учитываются практически все геометрические и физические параметры преобразователя вплоть до анизотропии магнитных и электрических свойств материалов.

Список литературы: 1. Сучков Г.М., Петрищев О.М., Десятниченко О.В., Юданова Н.М. ЕМА товшинометрия (огляд) // Вестник национального технического университета «ХПИ», 2010. - №12. – С. 110 – 121. 2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 283 с. 3. Сучков Г. М. Современные возможности ЭМА дефектоскопии // Дефектоскопия, 2005, №12. С. 24 - 39. 4. Петрищев О.Н. Возбуждение электромагнитным полем волн Рэлея в ферромагнитных металлах // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2005. - №4. – С. 23 – 30. 5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с. 6. Pardee W. J. Radially propagating surface and plate waves // J. Acoust. Soc. Amer. – 1982. – V.71. - №1. – P. 1 – 4. 7. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. – М. – Л.: Изд – во АН СССР. – 1948. – 727 с. 8. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с. 9. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с. 10. Тихонов А.Н. Математическая модель // Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – Т.3. – С.574 – 575. 11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с. 12. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука. 1985. – 448 с. 13. Гринченко В. Т., Петрищев О. Н. Возбуждение внешним магнитным полем упругих колебаний в продольно поляризованной магнитоэлектрической полосе // Прикладная механика. – 1986. – Т.22. – № 7. – С. 60–65.

Поступила в редакцию 20.05.11